# МАТЕМАТИКА

УДК 517.929.2+517.935

А.В. БРАТИЩЕВ, Л.И. КАЛИНИЧЕНКО

## О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ И РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

*В статье дается решение линейного дискретного разностного уравнения бесконечного порядка* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k y(k+n) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x(k+n), \quad n = 0,1,\ldots$, *в пространствах последовательностей* $I_r = \left\{ \{x(k)\} \in \mathbb{C} : \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|x(k)|} < r \right\}, \quad r \in (0, \infty]$, $P_r = \left\{ \{x(k)\} \in \mathbb{C} : \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|x(k)|} \le r \right\}, \quad r \in [0, \infty)$. *Получена характеризация соответствующих разностных операторов в классе бесконечных матричных операторов, которые действуют в этих пространствах.*

***Ключевые слова:*** *линейное дискретное разностное уравнение бесконечного порядка, матричный оператор, характеристическая функция, пространство последовательностей, решение уравнения.*

**Введение.** Функционирование одномерных линейных дискретных стационарных систем управления моделируется разностным уравнением $n$ - го порядка

$$a_n y(k+n) + \ldots + a_0 y(k) = b_m x(k+m) + \ldots + b_0 x(k), \qquad (1)$$

где $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_i, b_i \in \mathbb{C}$, $a_n, b_m \neq 0$, а искомая последова-тельность $\{y(k)\} \in \mathbb{C}$ удовлетворяет начальным условием $y(0) = y_0, \ldots, y(n-1) = y_{n-1}$ (см., например, [1], гл.12).

Выходной сигнал $\{y(k)\}$ для заданного входного сигнала $\{x(k)\}$ отыскивается с помощью Z-преобразования $\{x(k)\} \leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x(k)}{z^k}$, которое переводит (1) в линейное алгебраическое уравнение. При этом пространства входных и выходных сигналов задаются в виде

$$I_\infty = \left\{ \{x(k)\} \in C : \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{x(k)} < \infty \right\}.$$

Левую часть уравнения (1) можно интерпретировать как верхнетреугольный матричный оператор $M(\{x(k)\}) := \left\{\sum_{s=0}^{n} a_s x(s+k)\right\}$ в пространстве $I_\infty$, задаваемый бесконечной матрицей

$$M = \begin{matrix} a_0\ a_1\ \ldots\ a_n\ 0\ldots \\ 0\ \ a_0 \ldots a_{n-1}\ a_n \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix}.$$

Этот оператор обладает свойством

$$\forall z \quad \Box \quad M\left(\left\{z^k\right\}\right) = Q(z)\{z^k\}, \qquad (2)$$

где $Q(z) := \sum_{s=0}^{n} a_s z^s$.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы: 1) во множестве всех матричных операторов, действующих в заданном пространстве последовательностей, описать класс разностных операторов бесконечного порядка с подобным (2) свойством; 2) решить полученные разностные уравнения. Используемые в статье результаты комплексного анализа можно найти, например, в [2].

**Описание класса матричных операторов.** Рассмотрим так называемые аналитические пространства последовательностей:

$$I_r = \left\{\{x(k)\} \quad \Box : \overline{\lim_{k\to}} \sqrt[k]{|x(k)|} < r\right\}, \quad r \quad (0, \quad ];$$

$$P_r = \left\{\{x(k)\} \quad \Box : \overline{\lim_{k\to}} \sqrt[k]{|x(k)|} \quad r\right\}, \quad r \quad [0, \quad ).$$

Эти пространства относительно билинейной формы

$$\langle x, y\rangle := \sum_{n=0}^{\infty} x(n)y(n)$$

являются двойственными [3] в следующем смысле:

$$I_r = \left\{\{y(k)\} \quad \Box : \forall \{x(k)\} \quad I_r \text{ ряд } \sum_{m=0} x(k)y(k) \text{ сходится}\right\} = P_{\frac{1}{r}}, \quad P_r = I_{\frac{1}{r}}.$$

Под действием матричного оператора $M = (m_{ij})$, например, в пространстве $I_r$, понимается следующее: $\forall \{x(k\} \quad I_r \quad \forall i \quad \Box \bigcup\{0\}$ ряды $\sum_{j=0}^{\infty} m_{ij}x(j)$ сходятся, и $M(\{x(k)\}) := \left\{\sum_{j=0}^{\infty} m_{ij}x(j)\right\} \in I_r$. Класс действующих в $I_r$ $(P_r)$ матричных операторов совпадает с классом всех слабо-непрерывных в $I_r$ $(P_r)$ линейных операторов относительно указанной двойственности [3].

Обозначим: $D(0,r) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, $\bar{D}(0,r) := \{z \in \mathbb{C} : |z| \le r\}$, $D(\infty,r) := \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$, $S(0,r) := \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$, $H(G)$ - пространство голоморфных в области $G$ функций с топологией равномерной сходимости на компактах из $G$; $H(K)$ - пространство голоморфных на компакте $K$ функций с топологией индуктивного предела [4].

**Теорема 1.** Пусть матричный оператор $M = (m_{ij})$ действует в пространстве $I_r$. Тогда равносильны следующие утверждения:

1) $\exists\, \Phi(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H(D(0,r))\ \forall z \in D(0,r)\ M(\{z^k\}) = \Phi(z)\{z^k\}$;

2) матрица $M$ имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & \dots \\ & . & . & . \end{pmatrix}; \tag{3}$$

3) разностный оператор бесконечного порядка вида

$$M(\{x(k)\}) := \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} a_s x(s+k) \right\} \tag{4}$$

действует в пространстве $I_r$.

**Доказательство.** Функцию $\Phi(z)$ естественно назвать характеристической функцией оператора $M = (m_{ij})$.

Покажем $1) \Rightarrow 2)$. По условию

$$\forall z \in D(0,r)\ \forall i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \sum_{j=0}^{\infty} m_{ij} z^j = \Phi(z) z^i = \sum_{j=i}^{\infty} a_{j-i} z^j .$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $z^j$, получаем требуемый вид (3) матрицы $M$.

Равносильность утверждений 2) и 3) следует из определения действия матричного оператора.

Покажем $3) \Rightarrow 1)$. Так как по условию $\forall z \in D(0,r)$ ряд $\sum_{s=0}^{\infty} a_s z^s$ сходится, то его сумма $\Phi(z)$ голоморфна в $D(0,r)$ и

$$M(\{z^k\}) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s z^{s+k} = \Phi(z)\{z^k\}.$$

Теорема доказана.

*Замечание.* Фигурирующую в теореме функцию естественно назвать характеристической функцией оператора (4).

Аналогично доказывается

**Теорема 2.** Пусть матричный оператор $M = (m_{ij})$ действует в пространстве $P_r$. Тогда равносильны следующие утверждения:

1) $\exists\, \Phi(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H\left(\overline{D}(0,r)\right) \qquad \forall z \in \overline{D}(0,r)$

$M\left(\{z^n\}\right) = \Phi(z)\{z^n\}$;

2) матрица $M$ имеет вид (3);

3) разностный оператор бесконечного порядка (4) действует в пространстве $P_r$.

**Изоморфные пространства и интегральные представления операторов.** Пусть разностный оператор (4) действует в пространстве $I_r$. Образуем по нему разностное уравнение бесконечного порядка в $I_r$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k y(k+n) = f(n), \tag{5}$$

$n \quad □ \cup \{0\}$. Применение к нему □ -преобразования не дает алгебраического уравнения. Поэтому предложим другой способ, приводящий к эквивалентному интегральному уравнению в пространстве аналитических функций.

Так как по условию $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|y(n)|} < r$, то функция $y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y(n) z^n$ голоморфна на круге $\overline{D}\left(0, \frac{1}{r}\right)$. Верно и обратное. То есть пространства $I_r$, $H(\bar{D} \quad 0, \frac{1}{r} \quad )$ алгебраически изоморфны. Каждая функция $y(z)\Phi \quad \frac{1}{z}$, где $y(z) \quad \bar{D} \quad 0, \frac{1}{r}$, $\Phi \quad \frac{1}{z} \qquad D \quad , \frac{1}{r}$, голоморфна в некотором кольце $z <$ □ $\leq \frac{1}{r} \quad + |z| \quad \frac{1}{r} \quad \varepsilon$. Поэтому можно образовать линейный оператор в $H \quad \bar{D}(0, \frac{1}{r})$ по правилу

$$\exists R = R(y) < r \quad [Ly](z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R^{-1}} y(t) \frac{\Phi(t^{-1})}{t-z} dt. \tag{6}$$

Покажем, что он является образом оператора (4) при упомянутом изоморфизме. Действительно, учитывая равномерную сходимость ряда Лорана функции $y(z)\Phi \quad \frac{1}{z}$ на окружности $S \quad 0, \frac{1}{R}$, имеем $\forall z \quad D \quad 0, \frac{1}{R}$

$$\left[Ly\right](z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R^{-1}} \frac{1}{t-z}\sum_{n=0} y(n)t^n \sum_{k=0} a_k \frac{1}{t^k}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R^{-1}} \frac{1}{t-z}\left(\sum_{n=0}\sum_{k=0} a_k y(k+n)\ t^n + \sum_{n=1}\sum_{k=n} a_k y(k-n)\ \frac{1}{t^n}\right) dt = \sum_{n=0}\sum_{k=0} a_k y(k+n)\ z^n .$$

Таким образом, задача о нахождении решения разностного уравнения (5) в $I_r$ сводится к задаче нахождения решения интегрального уравнения

$$\left[Ly\right](z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R^{-1}} y(t)\frac{\Phi\ (t^{-1})}{t-z}dt = f(z) \qquad (7)$$

в пространстве $H(\overline{D}\left(0,\frac{1}{r}\right))$.

Заметим, что задача нахождения решения уравнения (5) в $P_r$ также сводится к решению уравнения (7) в $H(D\left(0,\frac{1}{r}\right))$. Только в этом случае число $R\ \ (r,\ \ )$ и является одним и тем же для всех $y \in H(D\left(0,\frac{1}{r}\right))$.

**Решение линейного разностного уравнения (5)**. Рассмотрим в $I_r$ оператор (4) с характеристической функцией $\Phi(z)$. В силу утверждения 1) теоремы 1 последовательность $\{\lambda^k\}$, где $|\lambda| < r$, является решением однородного уравнения $M\left(\{y(k)\}\right) = 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda$ есть нуль функции $\Phi(z)$. Далее, последовательности

$$\left\{\lambda^k\right\},\ \left\{k\lambda^k\right\},...,\left\{k(k-1)...(k-p+2)\lambda^k\right\}$$

являются решениями этого уравнения тогда и только тогда, когда

$$0 = M\left(\{k(k-1)...(k-l+1)\lambda^k\}\right) = \sum_{s=0} a_s(k+s)...(k+s-l+1)\lambda^{k+s} =$$

$$= \lambda^l \sum_{s=0} a_s(k+s)...(k+s-l+1)\lambda^{k+s-l} = \lambda^l\left\{\left(z^k\Phi\ (z)\right)^{(l)}(\lambda)\right\},\quad l = 1,2,....,p-1,$$

т.е. когда $\lambda \quad D(0,r)$ есть нуль кратности не ниже $p$ функции $\Phi(z)$.

Поэтому, если $\lambda$ есть нуль кратности $p$ функции $\Phi(z)$, то в силу равенства

$$span\left\{\{k(k-1)...(k-l+1)\lambda^k\}\right\}_{l=0}^{p-1} = span\left\{\{k^l\lambda^k\}\right\}_{l=0}^{p-1}$$

решениями однородного уравнения (5) будут все последовательности $\Lambda_0 := \{\lambda^k\}, ...,\ \Lambda_{p-1} := \{k^{p-1}\lambda^k\}$. Их естественно назвать элементарными

решениями. Обозначим через $\{\lambda_n, p_n\}$ упорядоченную по модулю последовательность нулей $\lambda_n$ функции $\Phi(z)$ в $D(0,r)$ кратностей соответственно $p_n$, $\Lambda := \{\Lambda_{n,l}\}^{- \quad p_n \quad 1}_{n=1,\, l=0}$ - соответствующую последовательность элементарных решений однородного уравнения $M(\{y(k)\}) = 0$ и $span\,\Lambda$ - линейную оболочку всевозможных линейных комбинаций этих решений.

Если $\{\lambda_n\}$- последовательность нулей $\Phi(z)$, то $\left\{\frac{1}{\lambda_n}\right\}$ $\left(\frac{1}{|\lambda_n|} \ddots \frac{1}{r}\right)$ есть последовательность всех полюсов мероморфной в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \bar{D}\ \ 0,\frac{1}{r}$ функции $\frac{1}{\Phi\left(z^{-1}\right)}$. Фиксируем последовательность $\{R_s\} \uparrow r, \ \ \forall s,n \ \ \square \ \ R_s \ \ |\lambda_n|$ и рассмотрим последовательность расширяющихся подпространств $H(\bar{D}\ \ 0,\frac{1}{R_s}\ )$ пространства $H(\bar{D}\left(0,\frac{1}{r}\right))$.

При этом $H(\bar{D}\ \ 0,\frac{1}{r}\ ) = \bigcup\limits_{s=1} H(\bar{D}\ \ 0,\frac{1}{R_s}\ )$. Фиксируем $s$. Так как $\forall f \ \ H(\bar{D}\ \ 0,\frac{1}{R_s}\ )$ функция $\frac{f(z)}{\Phi\left(z^{-1}\right)}$ голоморфна на окружности $S\ \ 0,\frac{1}{R_s}$ , то можно определить линейный оператор из $H(\bar{D}\ \ 0,\frac{1}{R_s}\ )$ в $H(\bar{D}\ \ 0,\frac{1}{R_{s+1}}\ )$ по формуле

$$L_s^{-1} f \ \ (z) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t| = R_S^{-1}} f(t) \frac{1}{(t-z)\Phi\,(t^{-1})} dt . \qquad (8)$$

Имеет место

**Теорема 3.** Пусть разностный оператор (4) действует в пространстве $I_r$, $r + (0, \quad ]$ и $\{\lambda_n, p_n\}$ - нули в $D(0,r)$ его характеристической функции $\Phi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ . Тогда:

1) $M^{-1}(\{0\}) = span\,\Lambda$ , т.е. каждое решение однородного уравнения $M\left(\{y(k)\}\right) = 0$ совпадает с какой-то линейной комбинацией его элементарных решений;

2) оператор (4) имеет линейный правый обратный $M_s^{-1} : I_{R_s} \to I_{R_{s+1}}, s = 1,2,\dots$, определяемый по правилу $\forall \{f(n)\} \quad I_{R_s} \quad M_s^{-1}\left(\{f(n)\}\right) := \{y(n)\}$, где

$$\sum_{k=0} y(k)z^k := L_s^{-1} f \quad (z),\ f(z) := \sum_{n=0} f(n)z^n .$$

То есть интеграл (8) дает формулу нахождения частного решения уравнения (5).

**Доказательство.** 1) Последовательности $\{\lambda_n^k\}_{k=0}$ соответствует функция

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_n^k z^k = \frac{1}{1-\lambda_n z} \in H(\overline{D}\left(0,\frac{1}{r}\right)),$$

а последовательности $\{k^l \lambda_n^k\}_{k=0}$ - функция $\sum_{k=0}^{\infty} k^l \lambda_n^k z^k$ . Поэтому

$$\underset{0\le l<p_n}{span}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} k^l \lambda_n^k z^k\right\} = \underset{0\le l<p_n}{span}\left\{\frac{1}{l!}\sum_{k=l}^{\infty} k\dots(k-l+1)\lambda_n^k z^{k-l}\right\} = \underset{0\le l<p_n}{span}\left\{\frac{(\lambda_n z)^l}{(1-\lambda_n z)^{l+1}}\right\}$$

.

И нам надо доказать равенство $L^{-1}(\{0\}) = span\ \frac{(\lambda_n z)^{l-1}}{(1-\lambda_n z)^l}\ {}_{n=1,\,l=1}^{p_n}$ в пространстве $H(\overline{D}\left(0,\frac{1}{r}\right))$. Наделим последнее топологией индуктивного предела банаховых пространств

$$B_s := y(z) : y(z) \quad H(D \quad 0,\frac{1}{r}+\frac{1}{s} \bigcap C(\overline{D} \quad 0,\frac{1}{r}+\frac{1}{s} ),\ \|y\|_s := \max_{|z|=\frac{1}{r}+\frac{1}{s}} |y(z)| .$$

Интегральный оператор (7) $L : H(\overline{D}\left(0,\frac{1}{r}\right)) \to H(\overline{D}\left(0,\frac{1}{r}\right))$ с ядром $\frac{\Phi(t^{-1})}{t-z}$ непрерывен в этом пространстве, а топологическое сопряженное

последнего ассоциируется с пространством $H(D \quad ,\frac{1}{r})$ [4]. Найдем вид

сопряженного оператора $L \ : H(D \ \to ,\frac{1}{r}) \quad H(D \quad ,\frac{1}{r})$. Для $R < r$

$$\left[L F\right](t) = \frac{1}{2\pi i} \underset{|z|=R^{-1}}{} F(z)\frac{\Phi(t^{-1})}{t-z}dz = \Phi(t^{-1}) \ F(t),$$

т.е. $L$ является оператором умножения на функцию $\Phi(t^{-1})$. Учитывая, что ядро оператора $L$ совпадает с полярой образа оператора $L$ ([5], с.705), имеем

$$L^{-1}(\{0\}) = \quad \Phi(t^{-1}) \ H(D \quad ,\frac{1}{r})^{0} =$$

$$= \ y \quad H(\bar{D} \ \ 0,\frac{1}{r} \ :\forall\, l \quad \square \quad \frac{1}{2\pi i} \underset{|t|=R^{-1}}{} y(t)\Phi(t^{-1})\frac{1}{t^{l}}dt = 0 \ =$$

$$= \ y \quad H(\bar{D} \ \ 0,\frac{1}{r}) : y(z)\Phi(z^{-1}) \quad H(D \quad ,\frac{1}{r}) \ =$$

$$= \ y \quad H(\bar{D} \ \ 0,\frac{1}{r}) : \exists\,\Psi(z) \quad H(D \quad ,\frac{1}{r}) \quad y(z) = \frac{\Psi(z)}{\Phi(z^{-1})} \ .$$

Функции $y(z)$ из последнего множества необходимо имеют конечное число полюсов из $\frac{1}{\lambda_n}$ порядков не выше соответственно $\{p_n\}$ в расширенной комплексной плоскости. Такие функции являются [2] конечными линейными комбинациями функций вида

$$\frac{(\lambda_n z)^{l}}{(1-\lambda_n z)^{l+1}}, \ l = 0,\ldots, p_n - 1, \ n = 1,2\ldots$$

или, что все равно, вида $z - \frac{1}{\lambda_n}^{-l-1}$.

2) Покажем, что оператор $L_s^{-1}$ является правым обратным к $L$ на пространстве $H(\overline{D}(0,R_s))$. Выберем $R_0 \quad (R_s, r), \ z \quad D \ \ 0,\frac{1}{R_0}$ .

Тогда

$$\left(LL_s^{-1}f\right)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R_0^{-1}}\frac{\Phi(t^{-1})}{t-z}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\varsigma|=R_S^{-1}}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma-t}\frac{1}{\Phi(\zeta^{-1})}d\varsigma\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\varsigma|=R_S^{-1}}\frac{f(\varsigma)}{\Phi(\zeta^{-1})}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R_0^{-1}}\frac{\frac{\Phi(t^{-1})}{t-z}}{\varsigma-t}dt\right)d\varsigma=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\varsigma|=R_S^{-1}}\frac{f(\varsigma)}{\Phi(\zeta^{-1})}\frac{\Phi(\zeta^{-1})}{\varsigma-z}d\varsigma=f(z).$$

Остается воспользоваться изоморфизмом пространств

$$H\left(\overline{D}\left(0,\frac{1}{r}\right)\right) \text{ и } I_r.$$

Теорема доказана.

*Замечание 1.* В условиях теоремы линейный правый обратный к $L$ на всем пространстве $H\left(\overline{D}\left(0,\frac{1}{r}\right)\right)$ существует тогда и только тогда, когда $\Phi(z)$ имеет конечное число нулей в $D(0,r)$. Это будет, например, в случае разностного уравнения конечного порядка (1).

*Замечание 2.* Рассмотрим разностное уравнение бесконечного порядка вида

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k y(k+n)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k x(k+n),\quad n=0,1,\dots, \tag{9}$$

где $\Phi(z):=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k,\ \Psi(z):=\sum_{k=0}^{\infty}b_k z^k\in H\left(D\left(0,\frac{1}{r}\right)\right)$.

Фиксируем $\{x(n)\}\in I_r$. Так как $x(z):=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^n\in H\left(\bar{D}\left(0,\frac{1}{R_s}\right)\right)$, то последовательность $\{y(n)\}$, являющаяся тейлоровскими коэффициентами функции

$$y(z):=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R_S^{-1}}x(t)\frac{\Psi(t^{-1})}{\Phi(t^{-1})}\frac{dt}{t-z},$$

будет частным решением уравнения (9). Доказательство проводится непосредственной подстановкой $y(z)$ в интегральное уравнение

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R^{-1}}y(t)\frac{\Phi(t^{-1})}{t-z}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R^{-1}}x(t)\frac{\Psi(t^{-1})}{t-z}dt,$$

эквивалентное уравнению (9).

От линейного разностного уравнения бесконечного порядка (5) в силу отмеченного изоморфизма пространств $I_r$, $H\left(\bar{D}\left(0,\frac{1}{r}\right)\right)$ и по аналогии с уравнением конечного порядка (1) можно было бы ожидать, что мно-

жество начальных данных, для которых уравнение (5) имеет решение в $I_r$ с начальными условиями $y(0) = y_0$, $y(1) = y_1, \dots$, совпадает с пространством $I_r$.

Как показывает следующее ниже замечание, это не так, а множество допустимых начальных данных определяется характеристической функцией $\Phi(z)$ и правой частью $\{f(n)\}$ уравнения (5).

*Замечание 3.* Пусть функция $f(z) := \sum_{n=0} f(n) z^n$ голоморфна на $\bar{D}\left(0, \frac{1}{R_0}\right)$, $R_0 < r$, и характеристическая функция $\Phi(z)$ не имеет нулей на окружности $S(0, R_0)$. Обозначим $\{y_n\}$ последовательность коэффициентов правильной части ряда Лорана голоморфной в некотором кольце $\left|z - \right| < \frac{1}{R_0} < \varepsilon + |z| \quad \frac{1}{R_0} \quad \varepsilon$ функции $\frac{f(z)}{\Phi(z^{-1})}$. Последовательность $\{y_n\}$ является допустимым начальным условием уравнения (5) тогда и только тогда, когда она представима в виде суммы последовательности $\{y_n\}$ и некоторой последовательности из $span\,\Lambda$.

Действительно, пусть $\{y_n\}$ есть начальные данные, и функция $y(z) = \sum_{n=0} y(n) z^n \quad H(\bar{D}\ 0, \frac{1}{r})$ такова, что $\forall n \quad \cup \{0\} \ y(n) = y_n$. Так как каждое решение линейного уравнения (5) представимо в виде суммы частного решения неоднородного уравнения и решения однородного уравнения, то по теореме 3

$$\exists R_0 < r \quad y(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t| = R_0^{-1}} \frac{f(t)}{\Phi(t^{-1})} \frac{dt}{t - z} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{p_n} a_{k,l} \left(z - \frac{1}{\lambda_k}\right)^{-l-1}.$$

Первое слагаемое правой части есть правильная часть ряда Лорана функции $\frac{f(z)}{\Phi(t^{-1})}$, а последовательность коэффициентов ряда Маклорена второго слагаемого есть решение однородного разностного уравнения.

Пусть обратно, $\{y_n\} = \{y_n\} + \{y_n\}$, где

$$\exists R_0 < r \quad y_1(z) := \sum_{n=0} y_n z^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t| = R_0^{-1}} \frac{f(t)}{\Phi(t^{-1})} \frac{dt}{t - z}, \quad \exists m \quad y_2(z) := \sum_{n=0} y_n z^n = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=0}^{p_k} a_{k,l} \left(z - \frac{1}{\lambda_k}\right)^{-l-1}$$

$$\exists R_0 < r \quad y_1(z) := \sum_{n=0} y_n z^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t| = R_0^{-1}} \frac{f(t)}{\Phi(t^{-1})} \frac{dt}{t - z}, \quad \exists m \quad y_2(z) := \sum_{n=0} y_n z^n = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=0}^{p_k} a_{k,l} \left(z - \frac{1}{\lambda_k}\right)^{-l-1}$$

Так как по теореме 3 $y_1(z)$ есть частное решение неоднородного уравнения $Ly = f$, а $y_2(z)$ - частное решение однородного уравнения $Ly = 0$, то последовательность коэффициентов ряда Маклорена функции $y_1(z) + y_2(z)$ есть частное решение разностного уравнения (5) с начальными данными $\{y_n\}$.

Соответствующая теорема для пространства $P_r$ устанавливается проще, но имеет особенности, которые отражены в формулировке.

**Теорема 4.** Пусть разностный оператор (4) действует в пространстве $P_r, r \in [0, \infty)$ и $\{\lambda_n, p_n\}$ - нули в $\overline{D}(0, r)$ его характеристической функции $\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H(\overline{D}(0,r))$. Тогда:

1) $M^{-1}(\{0\}) = span\Lambda$ ;

2) оператор (4) имеет линейный правый обратный на всем $P_r$ и определяется по правилу

$$\exists R \quad 0, \frac{1}{r} \quad \forall \{f(n)\} \quad P_r \quad M^{-1}(\{f(n)\}) := \{y(n)\},$$

где

$$\sum_{n=0} y(n) z^n := \frac{1}{2\pi i} \int_{|t| - R} f(t) \frac{1}{(t - z)\Phi(t^{-1})} dt .$$

Результаты статьи анонсированы в [6].

**Библиографический список**


1. Гудвин Г.К., Грабе С.Ф., Сальгадо М.Р. Проектирование систем управления. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004.-912 с.

2. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Т.1,2. - М: Наука.- 1967. - 488 с., 624 с.

3. Toeplitz O. Die linearen vollcommenen Raume der Functionentheorie. Comment. Math. Helv.- Bd/23.-1949.-S.222-242.

4. Kothe G. Dualitat im der Functionen Theorie. J. Reine Angeu Math.-1953.-Bd.191.- S.30-50.

5. Эдвардс Р. Функциональный анализ.- М.: Мир, 1969. - 1072 с.

6. Братищев А.В., Калиниченко Л.И. О характеризации и разрешимости линейных дискретных разностных уравнений бесконечного порядка// Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 13-й зимней школы.- Саратов: ООО "Научная книга", 2006.- С.37-38.


Материал поступил в редакцию 01.11.06.

A.V. BRATISHCHEV, L.I. KALINICHENKO

## ON THE CHARACTERIZATION AND SOLVABILITY OF INFINITE ORDER LINEAR DISCRETE DIFFERENCE EQUATIONS

Authors give the solution of linear discrete difference equation of infinite order $\underset{k=0}{} a_k y(k+n) = \underset{k=0}{} b_k x(k+n), \quad n = 0,1,\ldots$, in the sequences space $I_r = \left\{ \{x(k)\} \quad □ : \overline{\lim_{k \to}} \sqrt[k]{|x(k)|} < r \right\}, \quad r \quad (0, \quad ]$. $P_r = \left\{ \{x(k)\} \quad □ : \overline{\lim_{k \to}} \sqrt[k]{|x(k)|} \quad r \right\}, \quad r \quad [0, \quad )$,
They propose description of correspondence difference operators in the classes of infinite matrix operators.

**БРАТИЩЕВ Александр Васильевич** (1949), профессор кафедры математики Донского государственного технического университета, доктор физико-математических наук (1998), профессор (2001). Окончил механико-математический факультет РГУ (1971).
Научные интересы: комплексный анализ; функциональный анализ в локально выпуклых пространствах; теория управления.
Автор более 80 научных работ в отечественной и зарубежной печати.

**КАЛИНИЧЕНКО Любовь Ивановна**, доцент (1987) кафедры математического анализа Южного федерального университета, кандидат физико-математических наук (1981). Окончила механико-математический факультет РГУ (1971).
Научные интересы: комплексный анализ.
Автор более 20 научных работ.